Übungsklausur Exponentialfunktion (Romanesco)
Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)

1) Bestimme die Ableitung von $f(x) = (2x+1)\cdot e^{3x-1}$. (2VP)

2) Berechne $\int_0^1 (2e^{2x}+1)dx$. (2VP)

3) Löse die Gleichung: $(e^x - \frac{1}{e})\cdot(e^{2x} - e^x) = 0$. (2VP)

4) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 6 - 4\cdot e^{-0,5x}$.
a) Gib die Asymptote von f an.
b) Zeige, dass f streng monoton wachsend ist.
c) Skizziere das Schaubild von f einschließlich Asymptote. (4VP)

5) Gegeben sind die Schaubilder der folgenden drei Funktionen, jeweils mit allen Asymptoten.

Schaubild 1

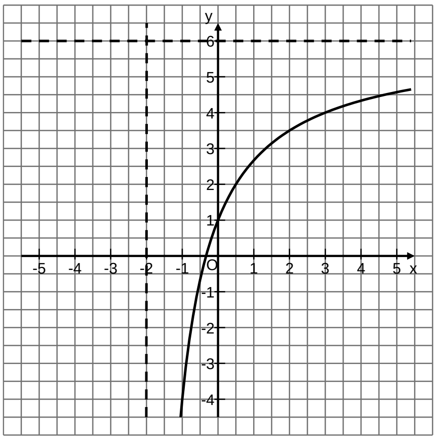


Schaubild 2

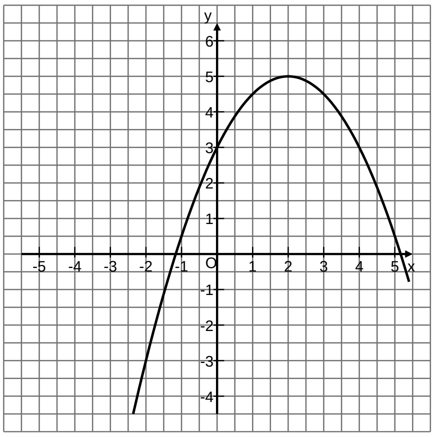
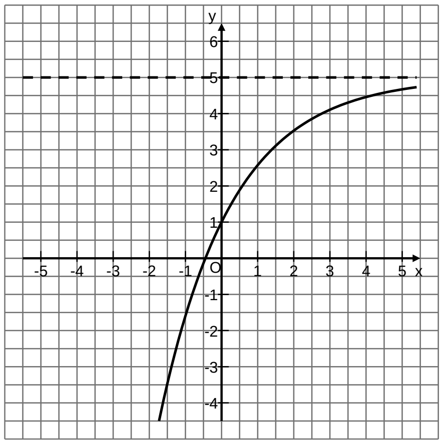


Schaubild 3



Diese Schaubilder werden beschrieben durch die Funktionen f, g und h mit

$f(x) = a - 4\cdot e^{-0,5x}$ $\quad g(x) = \frac{5x}{2+x} + 1$ $\quad h(x) = c\cdot(x-2)^2 + 5$

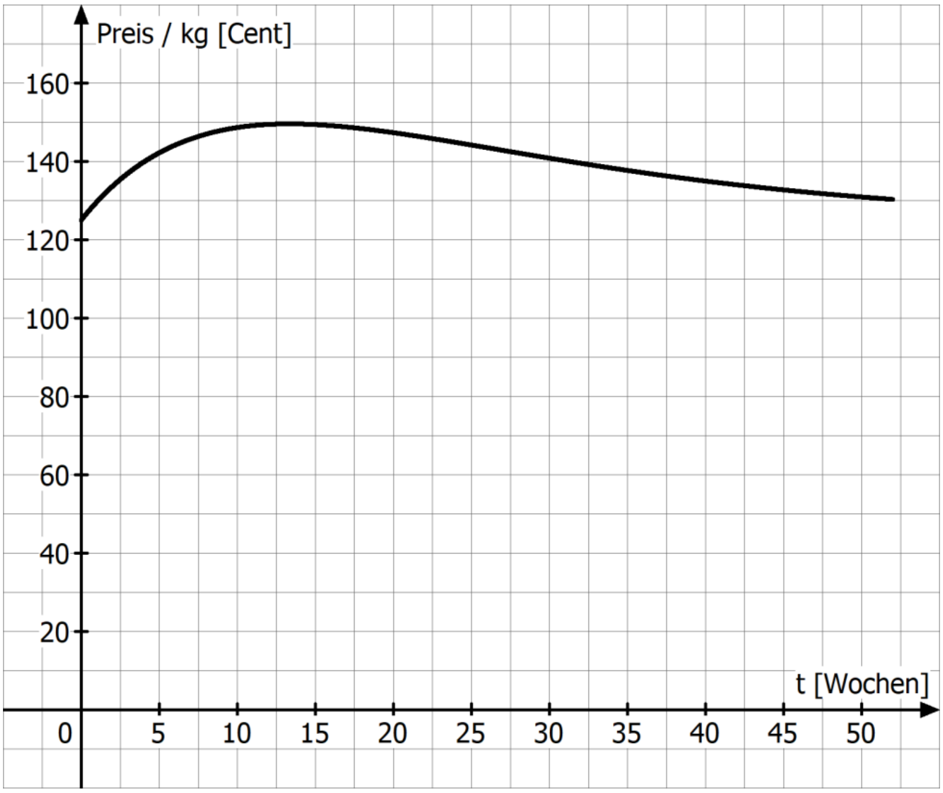
a) Ordne den Funktionen f, g und h jeweils dem passenden Schaubild zu. Begründe Deine Zuordnung.
b) Bestimme die Werte für a und c. (5VP)

Übungsklausur Exponentialfunktion (Romanesco)
Wahlteil (mit WTR und Merkhilfe)

Gemüse Romanesco

Aufgabe 1
Der Kilogrammpreis der Gemüsesorte Romanesco verändert sich im Laufe eines Jahres wöchentlich. Der Preis für 1kg kann für das kommende Jahr durch die Funktion

$f(t) = 5t \cdot e^{-0,075t} + 125$ mit $t \geq 0$ beschrieben werden. (t in Wochen mit $0 \leq t \leq 52$, f(t) in Cent)



a) Beantworte folgende Fragen anhand des Graphen:

(1) Wann erreicht der kg-Preis seinen höchsten Stand? Wie hoch ist er dann?
(2) In welchem Zeitraum liegt der Preis für 1kg Gemüse über 1,40€?

b) Die Funktion f gehört zur Schar der Funktionen $f_k(t) = 5t \cdot e^{-0,15k \cdot t} + 125$ mit $t \geq 0$.

(1) Gib den Wert von k an, der zu f gehört.
(2) Berechne den Wert von k so, dass der kg-Preis in der 20. Woche 1,65€ ist.

c) Eine ungünstige Prognose für das kommende Jahr wird durch das Schaubild $f_{0,3}$ beschrieben.
Eine günstige Prognose durch das Schaubild von f_1.
Ein Gastwirt will in der 4 Woche die Gemüsesorte Romanesco kaufen.
Wie viel zahlt er pro Kilogramm im ungünstigeren Fall mehr als im günstigen Fall?

Aufgabe 2
Für jedes $a > 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch

$f_a(x) = a \cdot e^{ax} - 1$

Für welches a gilt $\int_0^1 f_a(x) = 0$?

Übungsklausur Exponentialfunktion (Romanesco)

Lösungen Pflichtteil:

1) $f'(x) = 2e^{3x-1} + (2x+1)e^{3x-1} \cdot 3 = (5+6x)e^{3x-1}$ **2P**

2) $\int_0^1 (2e^{2x}+1)dx = \left[e^{2x}+x\right]_0^1 = e^2+1-\left(\underbrace{e^0}_{=1}+0\right) = e^2$ **2P**

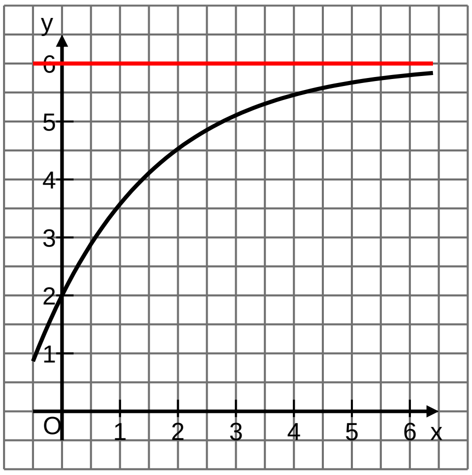
3) $(e^x - \frac{1}{e}) \cdot (e^{2x} - e^x) = 0$

$e^x - \frac{1}{e} = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-1} \Leftrightarrow \boxed{x_1 = -1}$ oder $e^{2x} - e^x = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = e^x \Leftrightarrow 2x = x \Leftrightarrow \boxed{x_2 = 0}$ **2P**

4) a) Für $x \to \infty$ gilt: $f(x) = 6 - \underbrace{4e^{-0,5x}}_{\to 0} \to 6 \Rightarrow y = 6$ waagerechte Asymptote (1P)

b) $f'(x) = 0 - 4 \cdot e^{-0,5x} \cdot (-0,5) = \underbrace{2}_{>0} \cdot \underbrace{e^{-0,5x}}_{>0} > 0$ für alle x (1,5P)

c)



(1,5P)

4P

5) a) f gehört zu Schaubild 3, da die Funktion f eine verschobene Exponentialfunktion ist. Diese besitzt eine waagerechte, aber keine senkrechte Asymptote. (1P)
g gehört zu Schaubild 1, da die Funktion g eine senkrechte Asymptote bei $x = -2$ besitzt. (1P)
h gehört zu Schaubild 2, da die Funktion h eine verschobene Parabel ist. (1P)

b) $a = 5$ da f(x) die waagerechte Asymptote $y = 5$ besitzt. (1P)

$c = -\frac{1}{2}$, da der Streckfaktor der Parabel $\frac{1}{2}$ ist und Minuszeichen, da die Parabel nach unten geöffnet ist. (1P) **5P**

Summe: 15 Punkte

Übungsklausur Exponentialfunktion (Romanesco)

Lösungen Wahlteil:

Aufgabe 1

a) (1) Maximum bei P(12,5|1,50) $\Rightarrow$ $\boxed{\text{nach 12,5 Wochen}}$ für den $\boxed{\text{Preis 1,50€}}$

(2) $f(t)=140 \Rightarrow t_1 \approx 4; t_2 \approx 32 \Rightarrow$ $\boxed{\text{von ca. 4 bis 32 Wochen}}$

b) (1) $0{,}15k = 0{,}075 \Leftrightarrow \boxed{k=0{,}5}$

(2) $f_k(20) = 5\cdot 20\cdot e^{-0{,}15\cdot k\cdot 20} + 125 = 165$

$\Leftrightarrow 100\cdot e^{-3k} = 40 \Leftrightarrow e^{-3k} = 0{,}4 \Leftrightarrow -3k = \ln 0{,}4 \Leftrightarrow k = \frac{\ln 0{,}4}{-3} \Leftrightarrow \boxed{k = 0{,}305}$

c) $f_{0,3}(4) = 141{,}71$; $f_1(4) = 136{,}00$

$\Rightarrow$ Er zahlt knapp 6Cent pro Kilogramm mehr.

Aufgabe 2

$$\int_0^1 f_a(x)\,dx = \int_0^1 a\cdot e^{ax} - 1\,dx = \left[e^{ax} - x\right]_0^1 = e^a - 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow e^a = 2 \Leftrightarrow \boxed{a = \ln 2}$$